221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Cadre : On fixe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle.

I Définitions, existence, structure

1) Définitions

Définition 1. Soient $p, n \in \mathbb{N}^\star$. Une équation différentielle linéaire d'ordre p sur $\mathbb{K}^n$ est une équation de la forme :

$$y^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{p-1} A_k(t) y^{(i)}(t) + B(t) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \forall i,\ A_i \in \mathcal{C}^0\left(I, M_n(\mathbb{K})\right) \\ B \in \mathcal{C}^0\left(I, \mathbb{K}^n\right) \end{cases} \tag{E}$$

On appelle équation différentielle linéaire homogène associée :

$$y^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{p-1} A_k(t) y^{(i)}(t) \tag{EH}$$

Si $n = 1$, l'équation est dite scalaire. Sinon, on parle de système d'équations différentielles linéaires.

Exemple 2. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *est un système homogène linéaire.*

Remarque 3. *Ce sont bien les coefficients en Y qui doivent être linéaires. L'équation $y' = t^2 y$ est bien linéaire.*

Remarque 4. *On peut ramener toute équation différentielle d'ordre p sur $\mathbb{K}^n$ à un système différentiel d'ordre 1 sur $\mathbb{K}^{np}$ par :*

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{p-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & I_n & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & I_n \\ A_0(t) & \cdots & \cdots & A_{p-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{p-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}$$

On limitera donc l'étude aux équations différentielles d'ordre 1 :

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t) \quad \text{où} \quad \begin{cases} A \in \mathcal{C}^0\left(I, M_n(\mathbb{K})\right) \\ B \in \mathcal{C}^0\left(I, \mathbb{K}^n\right) \end{cases}$$

2) Existence et unicité des solutions

Définition 5. Une solution de (E) est un couple (J, φ), où $J \subseteq I$ et y vérifie l'équation (E) sur J. Une solution (J, φ) est maximale s'il n'existe pas de prolongement Φ de φ défini sur $J' \supsetneq J$ tel que (J', Φ) soit solution.

Définition 6. Étant donné un point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution (J, y) de (E) sur un intervalle J contenant t_0 dans son intérieur et telle que $y(t_0) = y_0$.

Exemple 7 (Chute libre)**.** $z''(t) = -g$, $z(0) = h$, $z'(0) = v_z$

Théorème 8 (Cauchy-Lipschitz linéaire)**.** *Tout problème de Cauchy admet une unique solution maximale définie sur I tout entier.*

Remarque 9. *La version pour les équations d'ordre p nécessite de connaître $y_0, \dots, y_{p-1}$ tels que $Y(t_0) = y_0, \dots, Y^{(p-1)}(t_0) = y_{p-1}$.*

Remarque 10. *Dans le cas non linéaire, on n'a pas unicité. Le problème de Cauchy $y' = 3|y|^{\frac{2}{3}}$ de données $(0,0)$ admet au moins deux solutions maximales : 0 et $(t \mapsto t^3)$.*

3) Structure de l'espace des solutions

Théorème 11. *(i) L'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de (EH) est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$.*

(ii) L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est un sous-espace affine de dimension n de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de direction $\mathscr{S}_H$.

Corollaire 12. *L'application suivante est un isomorphisme :*

$$\Phi_{t_0} : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{S}_H & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ Y & \longmapsto & Y(t_0) \end{array} \right.$$

Contre-exemple 13. *L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $xy' = 2y$ est un espace vectoriel de dimension 2.*

Proposition 14 (Principe de superposition)**.** *Si Y_1 est solution de $Y' = AY + B_1$ et si Y_2 est solution de $Y' = AY + B_2$ avec A, B_1 et B_2 continues, alors $\lambda Y_1 + \mu Y_2$ est solution de $Y' = AY + \lambda B_1 + \mu B_2$.*

II Résolution explicite

1) Solutions générales de l'équation homogène

Proposition 15. *On suppose que A est de la forme* $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *dans une base $Y_1, \dots, Y_n$. Une solution générale de* (EH) *s'écrit :*

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{\lambda_k t} V_k \quad \text{où} \quad \alpha_k \in \mathbb{K}$$

Exemple 16. *Si $a \neq 1$, les solutions de $Y' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) Y$ ont pour base* $\left(e^t \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), e^{at} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ a-1 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

Proposition 17. *Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, la solution du problème de Cauchy $Y'(t) = AY(t)$ et $Y(t_0) = V_0$ est donnée par :*

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A} V_0$$

2) Solutions générales

Remarque 18. *Les solutions générales de* (E) *sont données par la somme d'une solution particulière et des solutions homogènes. Comme on a déjà vu le cas des équations homogènes* (EH)*, il suffit de trouver une solution particulière.*

Proposition 19 (Variation de la constante)**.** *Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$, une solution particulière de* (E) *est :*

$$Y(t) = \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A} B(u) du$$

Corollaire 20. *Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$, la solution du problème de Cauchy $Y'(t) = AY(t) + B(t)$ et $Y(t_0) = V_0$ est donnée par :*

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A} V_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A} B(u) du$$

Remarque 21. *Dans le cas où le second membre a une forme particulière (polynômiale, exponentielle, ...), on peut chercher une solution particulière sous cette forme.*

III Stabilité des solutions

On considère une équation différentielle homogène quelconque $Y' = f(t, Y)$, avec $f \in \mathcal{C}^1(I \times \mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$.

Définition 22. Un point y_0 de E est un point d'équilibre si $f(y_0) = 0$.

Remarque 23. *Si y_0 est un point d'équilibre, le problème de Cauchy $y' = f(y)$ de données (t_0, y_0) admet pour solution maximale la fonction constante égale à y_0.*

Définition 24. Soit y_0 un point d'équilibre.

(i) y_0 est dit stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si (I, y) est une solution qui vérifie $|y(t_0) - y_0| < \delta$, alors $[t_0, +\infty[\subset I$ et $|y(t) - y_0| < \varepsilon$ pour tout $t \geqslant t_0$.

(ii) y_0 est dit instable s'il n'est pas stable.

(iii) y_0 est dit asymptotiquement stable s'il existe $\delta > 0$ tel que, si (I, y) est une solution qui vérifie $|y(t_0) - y_0| < \delta$, alors $[t_0, +\infty[\subset I$ et $\lim_{t \to +\infty} y(t) = y_0$.

Ces définitions sont illustrées par la Figure 1.

Définition 25. Soit $x \in \Omega$. On appelle orbite de x l'image commune des solutions maximales passant par x.

Proposition 26. *L'ensemble des orbites forme une partition de Ω.*

Définition 27. On appelle portrait de phase cette partition.

Proposition 28. *Soit (I, y) une solution maximale telle qu'il existe $t_1 < t_2$ tels que $y(t_1) = y(t_2)$. Alors $I = \mathbb{R}$ et y est périodique.*

IV Exemples d'études

1) Étude qualitative des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$

On considère l'équation différentielle $Y' = AY$, où $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Théorème 29. *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. Alors les solutions du système linéaire $Y' = AY$ sont :*

(i) asymptotiquement stables si, et seulement si, $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$ *pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.*

(ii) *stables si, et seulement si, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, ou bien $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$, ou bien $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$ et le bloc correspondant est diagonalisable.*

Théorème 30. *Dans le cas $n = 2$, on peut classifier les différents types de portraits de phase possibles en fonction de $\det A$ et de $\operatorname{tr} A$. Cette classification est illustrée par la Figure 2.*

2) Utilisation des séries entières

Si l'équation est à coefficients polynômiaux, on peut chercher les solutions développables en séries entières autour de 0. Si cette solution est maximale, elle est unique par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Exemple 31. *Le problème de Cauchy $y' = y$ de données $(0, 1)$ admet pour solution $t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^n}{n!} = e^t$.*

Exemple 32 (Bessel)**.** *On considère l'équation différentielle de Bessel $xy'' + y' + xy = 0$. Sa solution f_0 valant 1 en 0 se développe en série entière sur $\mathbb{R}$. De plus, si f est une autre solution sur un intervalle $]0, a[$, alors (f, f_0) est libre si, et seulement si, f n'est pas bornée au voisinage de 0.*

3) Équation de Hill-Mathieu

Théorème 33 (Hill-Mathieu)**.** *On considère l'équation $y'' + qy = 0$, où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, paire et π-périodique. On note W l'espace des solutions, et $A : W \to W$ défini par $Ay(x) = y(x + \pi)$.*

(i) *Si $|\operatorname{tr}(A)| < 2$, alors toutes les solutions sont bornées.*

(ii) *Si $|\operatorname{tr}(A)| = 2$, alors il existe une solution non nulle bornée.*

(iii) *On a $|\operatorname{tr}(A)| < 2$ si, et seulement si, $y_1'(\pi)y_2(\pi) = 0$.*

(iv) *Si $|\operatorname{tr}(A)| > 2$, alors aucune solution non triviale n'est bornée.*

Application 34. *Les solutions de $y'' + y = 0$ sont toutes bornées, alors que les solutions non triviales de $y'' - y = 0$ sont toutes non bornées.*

Développements

— Équation de Bessel (32) [FGN]
— Équation de Hill-Mathieu (33) [QZ]

Références

[Dem] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles.* EDP Sciences
[QZ] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod
[FGN] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Analyse 4.* Cassini

Annexes

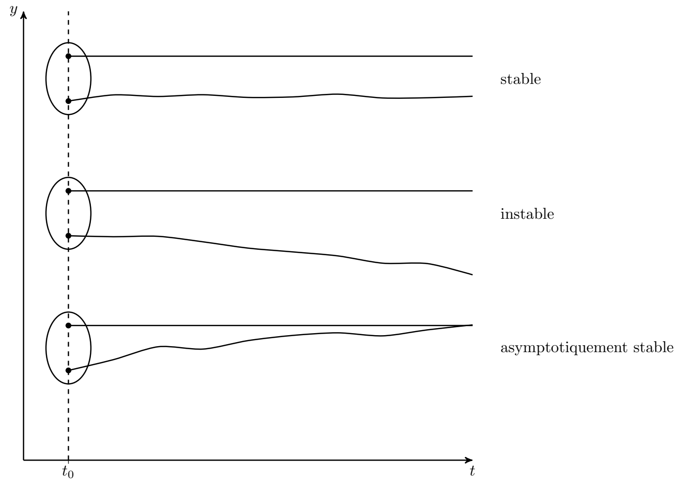

FIGURE 1 – Stabilité d'un point d'équilibre

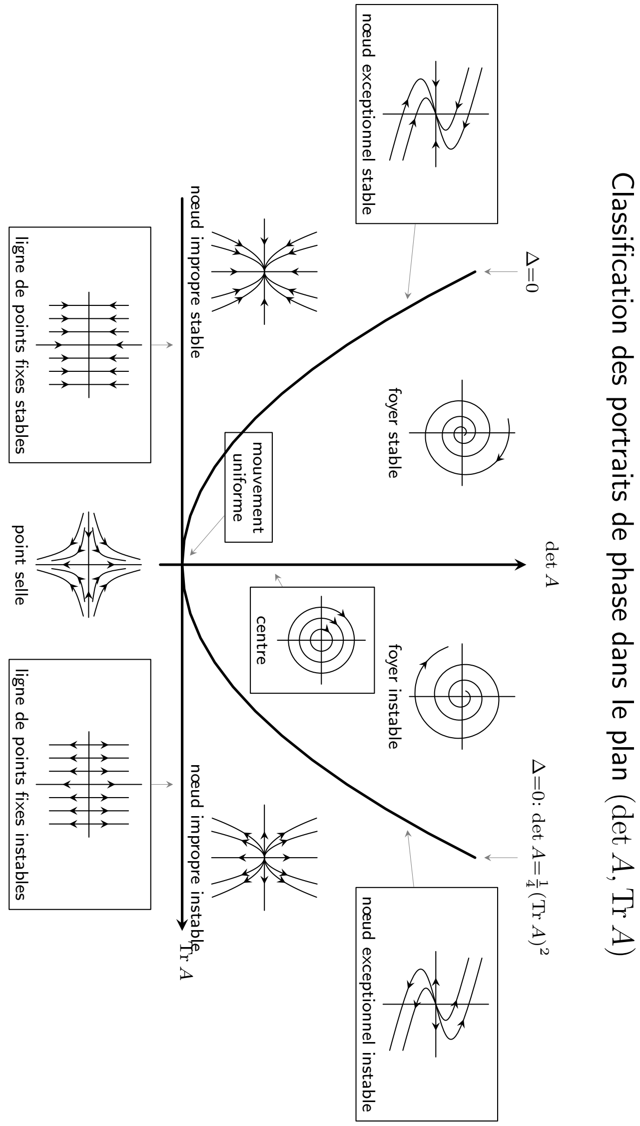

FIGURE 2 – Portraits de phase